תורת הקבוצות

קבוצה היא אוסף של מספרים, לא בהכרח בסדר מסויים, כל איבר מופיע פעם אחת בלבד.

קבוצה Set

איבר בקבוצה Element

תכונות של קבוצה:

1) אין ריבוי איברים בקבוצה

2) אין סדר

קבוצה לדוגמה:

S={1,2,4}={1,1,2,4}╪{1,2,3,4}

איברי הקבוצה S הם 1,2,4

שתי קבוצות נקראות שוות אם הן בעלות אותם איברים בדיוק

S={1,2,4},T={2,1,4} => S=T

{1²,2²,(-2)²,3²}={1,4,9}

c זה הכלה. נרשום ScT ונאמר שS מוכלת בT. למשל

{1,2}c{1,2,3{

{1,2,3}¢{1,2}

אם ScT וגם TcS אזי T=S

אברי קבוצה שהם לא בהכרח מספרים, לדוגמה S={ינשוף,פרח,3}.

בד"כ נתעסק בקבוצות סופיות - אלא אם כן מצויין אחרת.

T={1,{2,4},1/2,{{3{{{

{{3}}εT

2\εT

{2,4}εT

הקבוצה הריקה אינה מכילה איברים - Φ

קבוצה אוניברסלית - לפעמים בשאלות\דוגמאות נקרא לקבוצה שמכילה את כל האיברים בדוגמה \שאלה קבוצה אוניברסלית

פעולות בקבוצות

האיחוד1)(Union) של הקבוצות S וT הוא קבוצה המכילה כל איבר ששייך לT וכל איבר ששייך לS

SUT={x|xεS או xεT{

2)חיתוך של הקבוצות S וT הוא קבוצה שמכילה כל איבר ששייך גם לS וגם לT ורק אותם

S∩T={x"xεS וגם xεT{

דוגמה:

T={1,2,3},S={1,2,4{

SUT={1,2,3,4},S∩T={1,2{

שתי קבוצות שחיתוכן ריק נקראות קבוצות זרות

{e,1}∩{√2,√3}=Φ

מספר האיברים בקבוצה מסומן ע"י ||

|S|=|T|=3

|N|=∞,א0

3)הפרש (difference) ההפרש בין S לT הוא קבוצה המכילה את כל איברי S שאינם אברי T, ורק אותם. הסימון הוא \

S\T={x|xεS וגם x\εT}

S\T={{1,2,3}\{1,2,4}={3}

4)הפרש סימטרי(symetric difference) בין S לT הוא קבוצה המכילה את כל האיברים השייכים לS אך לא לT או שייכים לT אך לא לS - כלומר רק איברים ששייכים בדיוק לאחת מהקבוצות. הסימון הוא ▲

S▲T={x|xεS\T או xεT\S}

לדוגמה

S▲T={3,4}

משלים(complement) אם u קבוצה אוניברסלית בהקשר מסויים Scu אז המשלים של S הוא קבוצה המכילה את כל האיברים בקבוצה u שאינם בקבוצה S ורק אותם

S`=u\S

S={1,2,3},u={1,2,3,4,5,6},S`={4,5,6}

A,B=קבוצות כלשהן,u=קבוצה אוניברסלית

תכונות ההכלה

ΦcA

Acu

A∩BcA

תכונות המשלים

A∩A`=Φ

AUA`=u

A``=A

חוקי דה מורגן

(AUB)`=A`∩B`

(A∩B)`=A`UB`

בעזרת חוקי מורגן אפשר לקבל מכל שיוויון(או הכלה) שוויון דואלי(או הכלה דואלית). למשל

ידוע ש Φ=A∩Φ נפעיל משלים

(A∩Φ)`=Φ`

A`UΦ`=Φ`=u

AUu=u,A`Uu=u

אם A קבוצה אז A; הוא גם קבוצה נסמן B=A` ונקבל שBUu=u לכל קבוצה

כאשר יש סימן הכלה ועליו שמים משלים, צריך להפוך את סימן ההכלה:

AcB => B`cA`

הוכחה

נניח ש AcB ויהי XεB` אזי X\εB => X\εA => XεA`

הוכנו שאם XεB` אזי XεB` ז"א B`cA`

את הפעולות הפרש והפרש סימטרי ניתן להביע באמצעות הפעולות איחוד, חיתוך ומשלים.

A\B=A∩B`

A▲B=(AUB)\(A∩B)=(A\B)U(B\A)=(AUB)∩(A∩B)`

קבוצות נוספות

קבוצת המספרים הטבעיים N={1,2,3...}

קבוצת המספרים השלמים Z={...2,-1,0,1,2...}

קבוצת המספרים הרציונליים Q={m/n|n╪0,m,nεZ}

קבוצת המספרים הממשיים R כוללת גם את √2,e,π

קבוצת המספרים המרוכבים C={x+iy|x,yεR} i²=-1

קבוצת החזקה: אם A קבוצה כלשהי אז קבוצת החזקה של A מסומנת ע"י P(A) והיא מוגדרת אוסף כל התת קבוצות של A

P(A)={B|BcA}

לדוגמה

A={1,2},P({1,2})={Φ,{1},{2},{1,2}}

אם A קבוצה סופית יתקיים

|P(A)|=2^|A|

תכונות בסיסיות של פעולות בקבוצות

u תסמן את הקבוצה האוניברסלית

A∩A=A

A∩Φ=Φ(בליעה)

AUu=u

AUA=A

AUΦ=A

B∩A=A∩B

AUB=BUA

(AUB)UC=AU(BUC)

{} קבוצה

∞ אינסוף

א0 אינסוף בין מנייה(קוראים אלף אפס)

\ε לא שייך

ε שייך

∩ חיתוך

U איחוד

\ הפרש

▲ הפרש סימטרי

c מוכל

c מוכל ממש

לכל

קיים

¬ שלילה

V או

ʌ וגם

=> גורר

<=> אם ורק אם

≡ שקול